

## Proves d'accés a la universitat

Convocatòria 2016

# Matemàtiques

## Sèrie 1

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Sigui la recta  $r: (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$  i els punts  $P = (1, 0, -1)$  i  $Q = (2, 1, 1)$ .
  - a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt  $Q$  i és perpendicular al pla determinat per la recta  $r$  i el punt  $P$ .  
[1 punt]
  - b) Calculeu el punt de la recta  $r$  que equidista dels punts  $P$  i  $Q$ .  
[1 punt]
2. Tres nombres,  $x$ ,  $y$  i  $z$ , compleixen dues condicions: que el primer és la suma dels altres dos, i que el segon és la suma de la meitat del primer i el doble del tercer.
  - a) Comproveu que el càlcul dels tres nombres,  $x$ ,  $y$  i  $z$ , té una infinitat de solucions.  
[1 punt]
  - b) Trobeu una expressió general de les solucions.  
[1 punt]
3. Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de  $80 \text{ cm}^3$ . Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa  $1 \text{ €/cm}^2$ , però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.
  - a) Si  $x$  és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és  $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$ .  
[1 punt]
  - b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.  
[1 punt]

4. Sigui la funció  $f(x) = \sin(x)$ .
- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció  $f$  en els punts d'abscissa  $x = 0$  i  $x = \pi$ , respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.  
[1 punt]
- b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció  $f$  i les rectes tangents de l'apartat anterior (en cas de no haver resolt l'apartat anterior, suposeu que les rectes són  $y = x$  i  $y = -x + \pi$ , respectivament).  
[1 punt]

5. Responen a les qüestions següents:

- a) Trobeu l'única matriu de la forma  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  que satisfà que  $A^2 = A$ , i comproveu que  $A$  i  $A - I$  no són invertibles.  
[1 punt]
- b) Justifiqueu raonadament que si  $A$  és una matriu quadrada d'ordre  $n$  diferent de la matriu nul·la,  $0$ , i de la matriu identitat,  $I$ , i satisfà la igualtat  $A^2 = A$ , aleshores les matrius  $A$  i  $A - I$  no són invertibles.  
[1 punt]

6. Responen a les qüestions següents:

- a) Calculeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma  $Ax + By + Cz = D$ ) del pla que passa pel punt de coordenades  $(0, 0, 1)$  i és perpendicular als plans  $3x + y - z = 1$  i  $x + y + 2z = 5$ .  
[1 punt]
- b) Suposeu que un pla  $\pi_1$  és perpendicular a un segon pla  $\pi_2$  i que el pla  $\pi_2$  és a la vegada perpendicular a un tercer pla  $\pi_3$ . Expliqueu raonadament si necessàriament els plans  $\pi_1$  i  $\pi_3$  han de ser perpendiculars entre ells.  
[1 punt]



Institut  
d'Estudis  
Catalans

